

TOPOLOGICZNA OPTYMALIZACJA Z UŻYCIEM RÓWNAŃ SPRZĘŻONYCH

Na dzisiejszych zajęciach dobierzemy wektor grubości elementów $\theta = \text{thick}$, tak by ugięcie belki było jak najmniejsze. Jedynym elementem który zależy od θ jest macierz sztywności:

$$S(\theta)x = F$$

A dokładniej: macierz sztywności jest sumą macierzy elementów przemnożonych przez elementy θ . Dla późniejszej poprawy zbieżności dołożymy potęgę $\gamma = 3$ do tej zależności:

$$S(\theta) = \sum_i \theta_i^\gamma K^i$$

Będziemy chcieli zoptymalizować przesunięcie węzła w którym przyłożyliśmy siłę. Stwórzmy wektor wag g , który ma -1 w miejscu tego przemieszczenia, a resztę wartości ma zerową. Teraz nasza funkcja celu to $J = -\langle x, g \rangle$. Potraktujmy nasze równanie statyki jako więz i rozpiszmy funkcję celu powiększoną o mnożniki Lagrange'a:

$$L = - \sum_i x_i g_i + \sum_j \lambda_j \left(\sum_i S_{ji}(\theta) x_i - F_j \right)$$

Optymalne rozwiązanie powinno zerować pochodne po x , λ i θ :

$$\begin{cases} \sum_i S_{ji}(\theta) x_i - F_j &= 0 \\ -g_i + \sum_j \lambda_j S_{ji}(\theta) &= 0 \\ \sum_{ij} \lambda_j \frac{\partial}{\partial \theta_k} S_{ji}(\theta) x_i &= 0 \end{cases}$$

Pierwsze równanie to równanie statyki, opisuje ograniczenia jakie muszą być spełnione.

Drugie równanie to równanie sprzężone (adjoint):

$$S^T(\theta)\lambda = g$$

Zwróćmy uwagę, że w punkcie optymalnym kierunek gradientu funkcji celu jest równoległy do kierunku gradientu ograniczeń, $\nabla_x J \parallel \nabla_x \lambda(S(\theta)x - F)$. Mnożniki

Lagrange'a, λ_j , mogą być więc interpretowane jako *intensywność kary* zmuszającej do spełnienia j -tego ograniczenia.

Trzecie równanie to równanie na gradient funkcji Lagrange'a względem parametrów θ :

$$\frac{d}{d\theta_k} L = \sum_{ij} \lambda_j \frac{\partial}{\partial \theta_k} S_{ji}(\theta) x_i = \gamma \theta_k^{\gamma-1} \sum_{ij} K_{ji}^k(\theta) \lambda_j x_i$$

Zadanie 1

Wprowadź w funkcji mnożącej przez macierz sztywności `SMult` parametr $\gamma = 3$ (`gamma`) podnosząc `thick` do potęgi `gamma`. Zdefiniuj zmienną `frac = 0.5` i ustaw początkowe θ (`thick`) na równe `frac`.

Zadanie 2

Zdefiniuj wektor g i rozwiąż równanie sprzężone (zauważ że S jest symetryczna).

Zadanie 3

Zdefiniuj funkcję `calc_grad(int n, double * x, double * lambda, double * grad)`. Skopiuj do niej zawartość funkcji mnożącej `SMult` i zmień:

```
r[◇] += x[♠]*pow(thick[♣],gamma)*♡;
```

na:

```
grad[♣] += gamma*pow(thick[♣],gamma-1)*lambda[◇]*x[♠]*♡;
```

Wyświetl tak policzony gradient. Pamiętaj, że gradient ma taką samą długość jak `thick`, czyli `mx*my`. Pamiętaj także by wyzerować `grad` i wyciąć część murującą stopnie swobody.

Optymalizacja

Gradient wskazuje nam w jakim kierunku powinniśmy przesuwać nasze wartości parametrów by uzyskać lepszy wynik. Pierwszym nasuwającym się schematem postępowania byłoby:

```
thick[i] += grad[i];
```

Zadanie 4

Dodaj gradient do parametrów `thick[i] += grad[i];`. Iteruj taką procedurę, oglądając wyniki.

Tak ustawiony problem optymalizacyjny jest nieograniczony. Chcemy jednak uzyskać najmniejsze ugięcie przy ustalonej „masie” belki. Tzn: chcemy zachować sumę parametrów θ : $\sum_i \text{thick}[i] = \text{frac} * \text{mx} * \text{my}$. Możemy łatwo nałożyć ten więz na `grad`:

Zadanie 5

Odejmij od wektora `grad` jego sumę.

W kolejnych iteracjach `grad` ma różną skalę. Na początku jest duży, a później mały. Typową techniką w takich wypadkach jest normalizacja:

Zadanie 6

Zdefiniuj zmienną `move = 0.05`. Podziel `grad` przez jego największy element i pomnóż przez `move*5`.

Na nasz projekt musimy jednak narzucić bardziej istotne warunki. Po pierwsze nigdzie grubość nie może przekroczyć 1, i musi być powyżej 0. Ponadto zazwyczaj chcemy, by zmiana w pojedynczej iteracji nie przekroczyła `move`. Te warunki dość trudno pogodzić z warunkiem stałej sumy elementów.

Zadanie 7

Wynik dodania gradientu do parametrów wstaw do nowego wektora `nt[i] = thick[i] + grad[i];`. Dla danego parametru `scale` oblicz `thick[i] = scale * nt[i];`. Na tak obliczone `thick` narzuć powyżej opisane 4 warunki, obcinając za duże, bądź za małe wartości.

Zadanie 8

Zsumuj wartości `thick` po poprzedniej procedurze. Dobierz `scale` metodą bisekcji tak by $\sum_i \text{thick}[i] = \text{frac} * \text{mx} * \text{my}$.

Zadanie 9

Przetestuj program dla różnych obciążeń, ustawień parametru `move` i ustawień maksymalnej liczby iteracji w metodzie gradientów sprzężonych.