

ZAGADNIENIE WŁASNE

Na poprzednich zajęciach zajmowaliśmy się równaniem ruchu postaci:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{f} - \mathbf{S}\mathbf{x}$$

Pozwalało ono na znalezienie ruchu układu pod działaniem sił. W szczególności, jeśli przyłożyliśmy siłę do układu a następnie ją usunęliśmy dostawaliśmy drgania swobodne. W zależności od naszego modelu, drgania te mogły być mniej lub bardziej skomplikowane. Na dzisiejszych zajęciach zajmiemy się problemem znalezienia harmonicznych składowych drgań, które po zsumowaniu (z odpowiednimi współczynnikami) dadzą rzeczywiste drgania jakie można zaobserwować w układzie.

Znajdźmy najpierw *rozwiązanie ogólne równania jednorodnego*, tzn. zapytajmy jakie funkcje postaci $\mathbf{x} = f(t)\mathbf{w}$ spełniają równanie bez sił:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} = -\mathbf{S}\mathbf{x}$$

Po podstawieniu dostajemy:

$$\ddot{f}(t)\mathbf{M}\mathbf{w} = -f(t)\mathbf{S}\mathbf{w}$$

Jeśli znajdziemy $\mathbf{w}$ takie, że:

$$\mathbf{M}\mathbf{w} = \lambda\mathbf{S}\mathbf{w} \quad (1)$$

to otrzymamy:

$$\lambda\ddot{f}(t) = -f(t) \Rightarrow f(t) = \sin\left(t\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)$$

To oznacza, że $\mathbf{x} = \sin\left(t\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)\mathbf{w}$ jest oscylującym w czasie rozwiązaniem naszego równania dynamiki. Takie rozwiązanie nazywamy **drganie własnym** układu. Równanie $\mathbf{M}\mathbf{w} = \lambda\mathbf{S}\mathbf{w}$ nazywamy **równaniem własnym**, a λ to **wartość własna**.

Dziś skupimy się na znalezieniu zestawu **wektorów własnych** $\mathbf{w}$ i wartości λ dla naszego układu.

Zacznijmy od dominującej pary $\mathbf{w}, \lambda$

Jak wyznaczyć największy $\mathbf{w}$?

Zacniemy od największej wartości własnej λ . Warto zauważyć, że największa wartość własna odpowiada najniższej częstotliwości. W zastosowaniach inżynierskich, są to zazwyczaj drgania własne najmniej tłumione i niosące najwięcej energii.

Nasz wektor $\mathbf{w}$ będziemy znajdować **metodą potęgową** (iteracyjnie). Zauważmy najpierw, że wektor $\mathbf{w}$ może być dowolnej długości. To znaczy, jeśli wektor $\mathbf{w}$ spełnia równanie własne, to także wektor $2\mathbf{w}$ je spełnia. Możemy więc arbitralnie wybrać „skalę” wektora $\mathbf{w}$. Przyjmijmy więc, że $\mathbf{w}^T\mathbf{M}\mathbf{w} = 1$, tzn., że niesie on energię kinetyczną $\frac{1}{2}$.

Pomnożmy równanie własne przez $\mathbf{S}^{-1}$. Otrzymamy:

$$\mathbf{w} = \frac{1}{\lambda}\mathbf{S}^{-1}\mathbf{M}\mathbf{w}$$

Na podstawie tego wzoru możemy skonstruować prostą iterację:

$$\mathbf{p} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{M}\mathbf{w}$$

$$\mathbf{w} = \frac{\mathbf{p}}{\sqrt{\mathbf{p}^T\mathbf{M}\mathbf{p}}}$$

W pierwszym etapie liczymy wynik $\mathbf{S}^{-1}\mathbf{M}\mathbf{w}$, a następnie normalizujemy go tak aby $\mathbf{w}^T\mathbf{M}\mathbf{w} = 1$. Łatwo pokazać, że:

$$\mathbf{w}^T\mathbf{M}\mathbf{w} = \left(\frac{\mathbf{p}}{\sqrt{\mathbf{p}^T\mathbf{M}\mathbf{p}}}\right)^T \mathbf{M} \frac{\mathbf{p}}{\sqrt{\mathbf{p}^T\mathbf{M}\mathbf{p}}} = \frac{\mathbf{p}^T\mathbf{M}\mathbf{p}}{\mathbf{p}^T\mathbf{M}\mathbf{p}} = 1$$

Jeśli odpowiednio długo będziemy wykonywać taką iterację, wektor własny odpowiadający największej wartości własnej zacznie dominować. Ostatecznie $\mathbf{w}$ będzie składać się tylko z tego wektora.

Jak wyznaczyć największą λ ?

Zależność $\mathbf{p} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{M}\mathbf{w} = \lambda\mathbf{w}$ transponujemy i pomnożymy przez $\mathbf{M}\mathbf{w}$. Otrzymujemy:

$$\mathbf{p}^T\mathbf{M}\mathbf{w} = \lambda \underbrace{\mathbf{w}^T\mathbf{M}\mathbf{w}}_{=1}$$

Zatem $\mathbf{p}^T\mathbf{M}\mathbf{w}$ zbiegnie do największej wartości własnej λ .

Zadanie 1

Znajdź wektor $\mathbf{w}$ odpowiadający największej wartości własnej według następującego schematu iteracji:

- Oblicz $\mathbf{b} = \mathbf{M}\mathbf{w}$,
- Rozwiąż układ $\mathbf{S}\mathbf{p} = \mathbf{b}$,
- Oblicz $\mathbf{M}\mathbf{p}$,
- Oblicz $\mathbf{w} = \frac{1}{\sqrt{\langle \mathbf{p}, \mathbf{M}\mathbf{p} \rangle}} \mathbf{p}$.

Zadanie 2

Pokaż przemieszczenie $\mathbf{w}$ za pomocą funkcji `draw`. Zrób animację tego przemieszczenia przemnożonego przez $\sin\left(t\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)$.

Kolejne wartości własne λ

Chcielibyśmy aby wektory własne (drgania własne) były niezależne w energii kinetycznej. To znaczy, żeby energia kinetyczna ich sumy była równa sumie ich energii kinetycznych

$$E_k(\mathbf{w}^0 + \mathbf{w}^1) = E_k(\mathbf{w}^0) + E_k(\mathbf{w}^1)$$

To w połączeniu z naszą *skalą* daje nam bardzo ważny układ warunków:

$$\begin{cases} (\mathbf{w}^i)^T \mathbf{M} \mathbf{w}^j = 0 & \text{dla } i \neq j \\ (\mathbf{w}^i)^T \mathbf{M} \mathbf{w}^j = 1 & \text{dla } i = j \end{cases}$$

Mówiąc językiem numeryki: wektory te są do siebie ortonormalne względem macierzy $\mathbf{M}$. Takiej ortonormalizacji możemy dokonać za pomocą znanej z Analizy Matematycznej metody Grama-Schmidta.

Ortonormalizacja Grama-Schmidta

Załóżmy, że mamy N liniowo niezależnych wektorów. Możemy przeprowadzić ortonormalizację tego układu za pomocą klasycznej metody Grama-Schmidta znanej z algebry. Metoda ta jest jednak niestabilna numerycznie — na skutek

błędów numerycznych będziemy tracić ortogonalność. Użyjemy modyfikacji tej metody, która jest bardziej stabilna.

Aby zortonormalizować układ N wektorów:

- dla $i = 1$:
 - oblicz: $\mathbf{w}^1 = \frac{1}{\sqrt{\langle \mathbf{w}^1, \mathbf{M} \mathbf{w}^1 \rangle}} \mathbf{w}^1$,
- dla każdego i od 2 do N :
 - dla każdego j od 1 do $i - 1$ należy wykonać:
 - * oblicz $\mathbf{w}^i = \mathbf{w}^i - \frac{\langle \mathbf{w}^j, \mathbf{M} \mathbf{w}^i \rangle}{\langle \mathbf{w}^j, \mathbf{M} \mathbf{w}^j \rangle} \mathbf{w}^j$,
 - oblicz $\mathbf{w}^i = \frac{1}{\sqrt{\langle \mathbf{w}^i, \mathbf{M} \mathbf{w}^i \rangle}} \mathbf{w}^i$.

Po tej procedurze wszystkie wektory $\mathbf{w}^i$ są ortogonalne i długości 1 względem macierzy $\mathbf{M}$.

Zadanie 3

Znajdź wektory $\mathbf{w}^i$ odpowiadające 10-ciu największym wartościom własnym według następującego schematu iteracji:

- Oblicz $\mathbf{b} = \mathbf{M} \mathbf{w}^i$,
- Rozwiąż układ $\mathbf{S} \mathbf{p}^i = \mathbf{b}$,
- Przepisz $\mathbf{w}^i = \mathbf{p}^i$,
- Wykonaj ortonormalizację G-S wektorów $\mathbf{w}$.

Zadanie 4

Wyznacz odpowiednie λ_i .

Zadanie 5

Zrób animację dla kolejnych przemieszczeń $\mathbf{w}^i$ przemnożonych przez $\sin\left(t\frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}\right)$.