

RÓWNANIA RUCHU

Na tych laboratoriach skupimy się na scałkowaniu równania ruchu:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{f} - \mathbf{S}\mathbf{x}$$

Gdzie $\mathbf{x}$ to odkształcenie, $\mathbf{f}$ to siła, $\mathbf{M}$ to macierz masowa, zaś $\mathbf{S}$ to macierz sztywności.

Na początek przez $\mathbf{y}$ oznaczmy prędkość odkształcenia, czyli $\mathbf{y} = \dot{\mathbf{x}}$. Teraz mamy układ równań pierwszego rzędu:

$$\begin{cases} \mathbf{M}\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f} - \mathbf{S}\mathbf{x} \\ \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{y} \end{cases}$$

Zastępując pochodną po lewej stronie przez różnicę skończoną mamy:

$$\begin{cases} \mathbf{M} \frac{\mathbf{y}^{n+1} - \mathbf{y}^n}{dt} = \mathbf{f} - \mathbf{S}\mathbf{x} \\ \frac{\mathbf{x}^{n+1} - \mathbf{x}^n}{dt} = \mathbf{y} \end{cases}$$

Po prawej stronie równania możemy użyć $\mathbf{x}$ i $\mathbf{y}$ z nowej ($n+1$), bądź starej (n) iteracji. W zależności co użyjemy otrzymamy mniej lub bardziej uwikłane równanie, a schemat będzie jawny (explicit) bądź niejawny (implicit).

Uwaga: aby porównać różne schematy, każdy schemat zapisz w oddzielnej funkcji, której nagłówek powinien mieć postać:

```
void Dynamics_schemat(int N, double *x, double *y, double *f, double t_m
```

gdzie $\mathbf{x}$ i $\mathbf{y}$ to początkowe wartości $\mathbf{x}$ i $\mathbf{y}$, $\mathbf{f}$ to wektor sił, $t_{\max}$ to całkowity czas całkowania, a dt to krok czasowy.

Schemat prawie jawny (almost explicit)

Na początek wstawmy po prawej stronie wartości ze starej iteracji. Otrzymamy:

$$\begin{cases} \mathbf{M}\mathbf{y}^{n+1} = \mathbf{M}\mathbf{y}^n + dt(\mathbf{f} - \mathbf{S}\mathbf{x}^n) \\ \mathbf{x}^{n+1} = \mathbf{x}^n + dt\mathbf{y}^n \end{cases}$$

Zadanie

Napisz funkcję mnożącą przez macierz masową $\mathbf{M}$. W pliku `MesLib.h` jest ona zdefiniowana w analogiczny sposób jak macierz sztywności: przez globalną tablicę $\mathbf{M}$ i globalną stałą Mm .

Uwaga: W mnożeniu przez macierz masową, należy także zamrozić wybrane stopnie swobody.

Zadanie

Napisz funkcję całkującą równanie ruchu układu według następującego schematu:

- Oblicz $\mathbf{b}^n = \mathbf{M}\mathbf{y}^n + dt(\mathbf{f} - \mathbf{S}\mathbf{x}^n)$,
- Oblicz $\mathbf{x}^{n+1} = \mathbf{x}^n + dt\mathbf{y}^n$,
- Rozwiąż układ: $\mathbf{M}\mathbf{y}^{n+1} = \mathbf{b}^n$,
- Co 10-tą iterację wyświetl belkę.

Zadanie

Przeanalizuj dla jakich dt układ jest stabilny, a dla jakich nie.

Zadanie

Jak wygląda wzór na całkowitą energię układu (energia potencjalna sprężystości + energia kinetyczna)? Zróżniczuj ją po t i pokaż, że jest stała.

Zadanie

Wydrukuj w konsoli jak zmienia się całkowita energia układu w czasie.

Schemat pół niejawny (semi-implicit)

Prostą modyfikacją jest użycie po prawej stronie $\mathbf{x}$ ze starej iteracji i $\mathbf{y}$ z nowej, otrzymując:

$$\begin{cases} \mathbf{M}\mathbf{y}^{n+1} = \mathbf{M}\mathbf{y}^n + dt(\mathbf{f} - \mathbf{S}\mathbf{x}^n) \\ \mathbf{x}^{n+1} = \mathbf{x}^n + dt\mathbf{y}^{n+1} \end{cases}$$

Zadanie

Przekopiuuj funkcję `Dynamics` i zmodyfikuj ją tak aby układ na $\mathbf{y}^{n+1}$ był rozwiązywany przed obliczeniem $\mathbf{x}^{n+1}$.

Zadanie

Przeanalizuj dla jakich dt układ jest stabilny. Wydrukuj zmienność energii.

Schemat niejawny (fully-implicit)

Możemy także po prawej stronie wziąć obie wartości z nowej iteracji, otrzymując:

$$\begin{cases} \mathbf{M}\mathbf{y}^{n+1} &= \mathbf{M}\mathbf{y}^n + dt(\mathbf{f} - \mathbf{S}\mathbf{x}^{n+1}) \\ \mathbf{x}^{n+1} &= \mathbf{x}^n + dt\mathbf{y}^{n+1} \end{cases}$$

Wstawiając drugie równanie do pierwszego otrzymujemy:

$$\mathbf{M}\mathbf{y}^{n+1} = \mathbf{M}\mathbf{y}^n + dt(\mathbf{f} - \mathbf{S}(\mathbf{x}^n + dt\mathbf{y}^{n+1}))$$

Po przekształceniu:

$$(\mathbf{M} + dt^2\mathbf{S})\mathbf{y}^{n+1} = \mathbf{M}\mathbf{y}^n + dt(\mathbf{f} - \mathbf{S}\mathbf{x}^n)$$

Zadanie

Napisz funkcję mnożącą przez $\mathbf{M} + dt^2\mathbf{S}$

Zadanie

Zmodyfikuj kod, by realizował schemat w pełni niejawny, zamieniając macierz $\mathbf{M}$ na $\mathbf{M} + dt^2\mathbf{S}$ w obliczeniu y -ka.

Zadanie

Przeanalizuj dla jakich dt układ jest stabilny. Wydrukuj zmienność energii.

W pół kroku (midpoint)

Ostatnia z metod, którymi się zajmujemy bierze po prawej stronie średnią z wartości w nowej i starej iteracji:

$$\begin{cases} \mathbf{M}\mathbf{y}^{n+1} &= \mathbf{M}\mathbf{y}^n + dt \left(\mathbf{f} - \mathbf{S} \frac{\mathbf{x}^{n+1} + \mathbf{x}^n}{2} \right) \\ \mathbf{x}^{n+1} &= \mathbf{x}^n + dt \frac{\mathbf{y}^{n+1} + \mathbf{y}^n}{2} \end{cases}$$

Po wstawieniu drugiego równania do pierwszego mamy:

$$\mathbf{M}\mathbf{y}^{n+1} = \mathbf{M}\mathbf{y}^n + dt \left(\mathbf{f} - \mathbf{S} \frac{\mathbf{x}^n + dt \frac{\mathbf{y}^{n+1} + \mathbf{y}^n}{2} + \mathbf{x}^n}{2} \right)$$

Po uproszczeniu:

$$\mathbf{M}\mathbf{y}^{n+1} = \mathbf{M}\mathbf{y}^n + dt \left(\mathbf{f} - \mathbf{S} \left(\mathbf{x}^n + dt \frac{\mathbf{y}^{n+1} + \mathbf{y}^n}{4} \right) \right)$$

Ostatecznie:

$$\left(\mathbf{M} + \frac{dt^2}{4}\mathbf{S} \right) \mathbf{y}^{n+1} = \mathbf{M}\mathbf{y}^n + dt \left(\mathbf{f} - \mathbf{S} \left(\mathbf{x}^n + dt \frac{\mathbf{y}^n}{4} \right) \right)$$

Zadanie

Napisz funkcję mnożącą przez $\mathbf{M} + \frac{dt^2}{4}\mathbf{S}$.

Zadanie

Napisz funkcję całkującą równanie ruchu według następującego schematu (dla uproszczenia zapisu pominęliśmy number n iteracji):

- Oblicz $\mathbf{x} = \mathbf{x} + \frac{dt}{4}\mathbf{y}$,
- Oblicz $\mathbf{b} = \mathbf{M}\mathbf{y} + dt(\mathbf{f} - \mathbf{S}\mathbf{x})$,
- Oblicz $\mathbf{x} = \mathbf{x} + \frac{dt}{4}\mathbf{y}$,
- Rozwiąż układ: $(\mathbf{M} + \frac{dt^2}{4}\mathbf{S})\mathbf{y} = \mathbf{b}$,
- Oblicz $\mathbf{x} = \mathbf{x} + \frac{dt}{2}\mathbf{y}$,
- Co 10-tą iterację wyświetl belkę.

**Zadanie**

Przeanalizuj dla jakich dt układ jest stabilny. Wydrukuj zmienność energii.

Zadanie

Udowodnij, że metoda „w pół kroku” zachowuje energię całkowitą układu.¹

¹Podpowiedź: tak jak $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ to $x_{n+1}^T M x_{n+1} - x_n^T M x_n = (x_{n+1} - x_n)^T M (x_{n+1} + x_n)$